人口发展问题的定量研究

宋　健　李广元

编者按：1979年12月第二次全国人口理论科学讨论会在成都召开。我们选登了宋健、李广元同志的论文《人口发展问题的定量研究》。此文阐述了如何利用数学模型来研究人口发展问题，并根据我国人口统计数据，校验了模型的可靠性。通过计算机上的数值计算，得到了我国六种人口控制方案的预测数据及其他数值结果。

人口发展问题是一个涉及面很广的比较复杂的问题，从社会科学的角度出发，对人口问题的各个方面进行定性的研究和探讨当然是非常重要的。但是人口发展也与其他客观存在的一切事物一样，是一个客观的、物质运动的动态过程。在一个国家里，人口总是处在一定的国民经济发展水平，科学技术及文化水平等构成的复杂运动系统中，并在这些因素的相互作用、相互制约下发展变化。虽然人口这个发展过程比起其他机械的、物理的运动过程更为复杂，但是与其他运动过程一样，它的最基本的特征可以用量变的规律去描述。精确的定量的动态描述将会把人口发展问题的研究提高到一个新的高度。本文着重就人口发展问题的定量动态研究进行一些讨论，建立精确的人口发展运动方程式，用数学理论去严格定义人口统计和预报工作中所需要的几乎全部特征量，为人口研究统计和预报提供一个新的更合乎逻辑的工具。

这里介绍的是关于人口发展的一阶线性偏微分方程描述方法。用我国1975—1978年的人口统计数据去检验后，证明这个模型对预报和控制问题的研究是足够精确的。对人口发展的动态过程能被微分方程所描述这一事实不应该感到意外，列宁说过："自然界的统一性表现在用以描述各不同领域中各种现象的微分方程式的惊人的相似性。"由于篇幅的限制，我们把有关方程式的精确形式和人口发展各种变量的定义写在附录中，而在正文中仅作若干说明。

一　人口发展和控制问题定量研究的重要性和可能性

无论人口发展过程是一个多么复杂的运动过程，在整个过程中处处都有数量变化的表征。实际上在人口问题的许多定性研究中，最终也要落实到用量的概念来表述。没有对量的变化的研究就没有真正的人口学。例如，我们研究某个国家或地区的人口问题，首先就要知道该国家或地区的人口总数，出生率、死亡率、自然增长率等一些最基本的数字，这些当然都是对人口问题进行量的描述；再如我国为了控制人口的增长速度，提出了各种计划生育的指标，如"一胎化"，"晚、稀、少"以及某年出生率不要超过千分之几等等，这些是对我国的人口发展数量的控制要求。事实上，人口统计学中的各种问题①，人口规划和预测②，对人口平均寿命的计算③等无一不是从人口发展过程中的数量关系而得到的。有了对人口问题这些基本数量的精确研究，就可以使我们真正做到胸中有数。摆脱在人口问题研究中的盲目性。

其次，对人口问题进行定量研究，可以帮助发现人口发展的一些内在规律。例如，正是根据统计学对人口性别进行量的统计的结果，才得到了男女均约各占总人口一半这一带普遍性的规律（我国近几年统计女性人口占总人口的48.7%）；另外，通过对人口实际年龄分布密度（即人口的年龄构成）进行定量的分析，可以更精确地反映人口发展的客观过程，并且能定量地预测人口发展的未来趋势，制定我们所希望的人口规划，更自觉地对人口发展进

---

① 林富德：《人口统计基本问题提纲》，第二次全国人口理论科学讨论会论文，1979年12月。

② 北京经济学院人口研究室：《人口研究》，1977年第3期。

③ 查瑞传：《关于平均寿命的计算》，《人口研究》1978年第2期。

行各种定量的控制，使未来的人口发展与国民经济的发展相适应，这些无疑都是十分重要的。

当然，人口发展过程的定量研究，一般说来是非常复杂的，因为影响人口发展过程的因素非常多。欲将影响这一过程的所有因素都准确地考虑在内显然是很困难的。但是，我们可以抓住影响人口发展的主要因素来建立它的模型，使它在足够精确的程度上反映人口过程的基本发展规律。在现代科学技术条件下，要作到这一点是完全可能的。正是由于计算机技术、数据库技术和计算机网络的发展；正是由于现代控制理论、运筹学和系统工程等现代科学在社会科学中的应用和发展，使得过去认为不能进行定量研究或不能精确研究的许多社会问题，在今天可以作精密地定量分析、计算、模拟、预测和控制①。人口问题就是一个典型的例子。

二　对人口问题如何进行定量研究

到目前为止，对人口问题定量研究的主要方法可以称为“统计处理法”。这是人口学中定量研究的一种传统方法，包括经典的人口统计学中的一些算法②和预测人口的“年龄移算法”③等，它的基础是统计学有关知识和关于人口问题的一些基本的数学计算公式。这类方法不仅为我国人口科学工作者所采用，国际上也有很多国家在采用。它的特点在于方法简便，计算公式简单，易于掌握和使用，与现代化的电子计算机相结合，应用起来也是有效的。这方面的工作，在我国人口问题的定量研究中已经取得了一些成果，例如人民大学人口理论研究所与有关单位合作对我国未来人口发展进行了一些初步预测以及对北京市人口发展也进行了预测。由于这类方法的数学描述比较简单，比较粗略，因此无法对人口发展中各种量的依赖关系（即函数关系）作更细致的研究。

这里介绍一下我们正在研究的人口发展问题定量研究的另一种方法，即所谓“模型法”。模型法的基本思想是在影响人口发展的诸多因素中，抓住主要因素，来建立人口发展的动态数学模型，使它能足够精确地反映人口发展的动态过程。人口发展的基本数学模型可以有两种表现形式。一种是连续型的，它是用一个带有边界控制的偏微分方程组来描述的④；另一种是离散型的，是用状态转移矩阵来描述的⑤。就实质而言，这两种模型是一回事。在两种形式的模型中，都把人口年龄分布密度函数当作人口发展的基本状态。只要有了较精确的初始人口统计数据，例如某年的人口按龄分布密度（即人口的年龄构成）和按龄死亡率，就可以通过解算这两种数学模型方程式的任意一种，求出人口年龄分布密度函数的发展规律，定量地得到人口发展中的下列结果：

1. 规定今后若干年内的控制出生人数（或规定相对出生率和总人数）可以比较精确地计算出需要控制的每个育龄妇女平均生育的胎数。

2. 规定平均生育胎数，可以算出生育人数及以后若干年的人口年龄分布密度（即人口的年龄构成）。

3. 从当前人口信息（包括人口按龄分布密度和按龄死亡率）出发，预测今后若干年人口发展，并可求出未来人口发展达到峰值的时间（年代）和总人口数。也可以求出今后若干年逐年的人口分布密度、总人口数、出生率、自然增长率、出生人数等结果。

4. 可以分析和确定今后若干年的人口发展过程属于何种类型，是上升型（增长型），下降型（衰减型），还是平缓型（稳定型），从而定量地分析未来人口发展的趋势和起伏状况；能够求出使人口总数长

---

① 参见钱学森、宋健：《工程控制论》（再版），科学出版社。钱学森、乌家培：《组织管理社会主义建设的技术——社会工程》，《经济管理》1979年第1期。

② 刘铮：《关于人口统计中几个指标的计算方法》，《人口研究》1979年第1期。

③ 北京经济学院人口研究室：《人口研究》1977年第3期。

④ 参见宋健、李广元：《人口控制问题》，《自然杂志》1979年第9期；Langhaar, H.L. General-Population Theory in the Age Time Continuum, J. of the Franklin Inst, Vol. 293, No.3 March1972, PP.199—214。

⑤ 参见H. Kwakernaak, Application of Control theony to population policy. (Edited by-A. Bensoussan and J.L. Lions, New Trends in Systems Analysis. Springer-Verlag, 1977, P359—378) (Netherland)；宋健、王浣尘、于景元、李广元：“人口动态过程的控制和大系统结构”，第一次系统工程学术讨论会会议论文集，科学出版社（即将出版）。

期保持常数时所应保持的出生率和平均生育胎数。

5. 可以按龄计算人口所期望的平均寿命，计算人口"老化"指数，劳动力在人口构成中的变化以及人口抚养指数等各种人口指标。

6. 可以根据对人口发展的规划要求，准确地求出对人口发展应该予先采取的控制方案，以进行定量控制。并可在多种限制的条件下，根据一种或多种指标求取最优控制方案。

7. 模型法可以分省、市，分地区建立数学模型，考虑到人口的迁移，然后联立起来，形成全国的多维方程组，这就能更精密地预测全国人口发展过程。这样可以对不同的地区采用不同的控制方案，更符合我国的实际情况。

综上所述，"模型法"的优点在于能把人口发展中的许多因素考虑进去，在对人口问题的定量研究上更加精细。例如在模型中的生育密度函数中，可以把计划生育的各种决策都包括进去，如"一胎化"及"晚、稀、少"等要求都可通过构造不同的生育密度函数体现出来。此外，"模型法"还能解决"统计处理法"所不能解决的一些人口发展中的问题。例如"模型法"可以根据国民经济计划的要求对人口发展提出事先所希望的各种控制目标，通过选择适当的控制量（如相对出生率）可以对人口发展过程实施开环控制以及闭环的反馈控制，这一点"统计处理法"是很难做到的。

当然，"模型法"在数学描述上不太直观，解算也比"统计处理法"稍为复杂，但是对模型中所定义的一些函数、变量或矩阵作适当的简化和合理的假定后，也可以得到比较简单的计算公式，再借助于电子计算机，应用起来也是很方便的。有关计算公式见本文附件。关于这些公式的详细推导和证明，我们将在别的地方另作介绍。

三　用模型法对我国人口定量研究的一些初步结果

我们利用"模型法"，对我国近期和未来的人口发展作了一些定量研究，得到如下的一些结果：

1. 对连续模型作了适当假定后，把偏微分方程化成了常微分方程并通过直接积分得到了解的解析表达式，利用我国1975～1978年的一些真实统计数据代入解析式检验，计算结果表明，由数值计算得到的自然增长R和全国人口总数 N 与实际统计数据相当符合（数据中未包含台湾省和港澳同胞）。计算结果与实际统计结果比较见下表：

数据＼年	1975		1976		1977		1978	
	统　计	计　算	统　计	计　算	统　计	计　算	统　计	计　算
R（万人）	1,438	1,440.5	1,178	1,179.5	1,138	1,137	1,147	1,145.6
N（万人）	91,970	91,849.5	93,267	93,029.1	94,523	94,166	95,809	95,311

2. 利用我国 1975 年和 1978 年的人口年龄分布密度，结合我国具体情况，构造了一个阶梯生育密度函数（定义见附录），再根据 1975 年和 1978 年统计的出生人数，我们算了 1975 年～1978 年育龄妇女每人平均生育胎数 $\beta(t)$。1975 年为 3,1978 年为 2.3，其结果如图 1 所示：

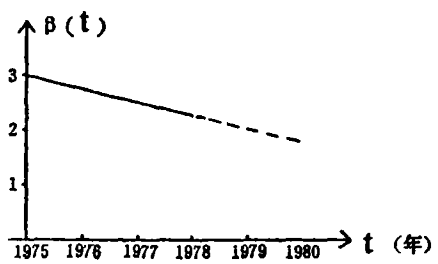

图 1　育龄妇女平均生育胎数 β(t)曲线

这一计算结果表明从 1975 年以来，我国实行计划生育控制人口增长取得了很大成绩，控制的效果是十分显著的。这充分说明只有象我国这样的社会主义国家，对人口的控制才能做得如此有效。

3. 分别以 1975 年和 1978 年我国人口年龄分布密度和按龄死亡率为起始值，利用解连续模型的差分方程，并假定 1978 年后逐步下降到 $\beta(t)=1$、1.5，2 等几种情况，计算预测了我国今后 100 年（到 2080 年）的人口发展，对 $\beta(t)=2$ 的情况，到 2052 年我国人口增长达到峰值，那时全国总人口约为 15.4 亿，此后开始下降，到 2080 年全国总人口下降到 14.7 亿左右；对 $\beta(t)=1$（即完全"一胎化"）的情况，到 2004 年我国人口增长达到峰值，全国总人口约为 10.5 亿，此后开始下降，到 2080 年全国总人口下降到 3.7 亿。

特别值得注意的是，如果以后一直保持1975年的妇女平均生育数（3胎），100年后我国人口将约达到42.64亿；如果保持1978年的生育水平（平均2.3胎）则100年后人口将约为21.19亿。图2表示了我国人口六种控制方案的预测结果。这些结果说明继续控制人口增长和制定正确的人口政策具有多么重要的意义。

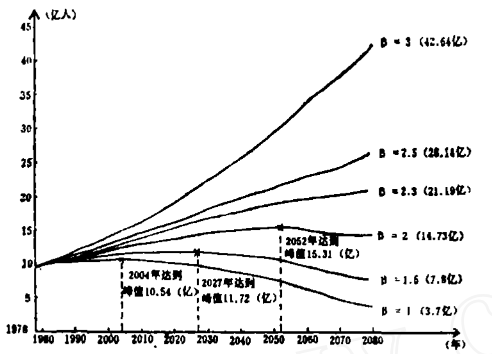

图2　人口控制未来预测曲线

需要说明的是以上定量研究的结果，是根据1975年和1978年的抽样统计数据推算后作为起始值得到的，由于抽样统计的局限性，因此可能会对上述定量研究的精确度有一定影响。

4.我们证明了一个计算平均寿命更精确的公式，见附录公式(13)。用这个公式算出的1975年和1978年我国人口的平均寿命是68.25岁和68.28岁。

四　计算机在人口定量研究中的应用

如上所述，人口问题的定量研究，需要建立人口发展过程的数学模型，搜集、处理大量的人口统计数据，还要求解由方程式描述的人口动态过程及人口问题中的各种控制方案，这一切如果没有计算机作为它的技术手段是很难解决的。具体来讲，计算机在人口定量研究中的应用可以有以下四个方面：

1.利用计算机对巨量的人口发展的各种数据、资料进行搜集、分类和精细地统计处理。如各地区各民族人口总数、出生率、死亡率、年龄、性别、职业的分布统计等等，掌握这些数据是定量研究人口问题的必要条件。例如我国每年进行的各省和全国的人口统计工作，如果使用计算机处理统计的各种数据，就可以把许多做人口统计工作的同志从繁重的手工计算中解放出来。特别是如果要对象我国这样人口数量级很大的国家进行全国性的人口普查，借助于计算机对普查的各种人口资料进行汇集和处理，那就比较容易。否则，工作量将是十分巨大的。

2.为了能迅速地准确地获得关于人口的各种数据，必须利用计算机建立人口档案数据库。数据库系统利用外存设备能够存贮本地区全部人口的各种资料和档案（人口总数、人口按龄构成、按龄死亡人数、个人的姓名、年龄、性别、出生年月、文化程度、学历、专长、个人简历等），使任何一级人口管理中心能够随时调用这些数据。这个数据量虽然很大，但现代计算机存贮设备是可以完成的。例如一个五千万人口的省，以每人占200个字节计算，只要10个磁盘就够了。现在很多西方国家（如西德、丹麦等）都建立了人口档案数据库。随着我国四个现代化的逐步实现，我们一定能做到这一点。有了人口档案数据库这个技术基础，比较精细的人口发展控制就不难实现。

3.计算机可以为各级人口决策机构（即人口管理中心）提供先进的技术手段。例如可以及时调用人口档案数据库中的信息，根据人口发展的数学模型和控制要求，分省、市计算出人口发展，作出人口发展短期和长期预报，从而为国家制定人口政策和计划，实施人口决策方案提供可靠的定量的数据。根据各地区和全国的规划，求出各地区育龄妇女平均生育数的长期可变动的指标。

4.利用计算机和计算机网络可以建立全国性的人口控制和管理系统工程。多级控制是这个系统的特点，数据库技术是这个系统必不可少的工具。例如我国可以设想每个省有一台用于人口问题的计算机，各个地区或县设终端设备，全国组成一个计算机网络，这样全国的人口系统就成为一个大系统。这个大系统的任务就是搜集和统计处理全国和各地区的人口资料，并将这些信息存贮在数据库系统中，随时给出人口控制的必要信息，按人口发展的控制模型，计算出全国和各地区人口长期控制方案。在这个过程中，全国的中央控制中心，应协调、平衡、管理各个省（或地区）的人口控制子系统，并互有信息交换，以求得全国人口控制达到最好的指标。

5.只有借助于电子计算机，才能对人口定量控制和决策进行各种优化方案的模拟试验和计算。

总之，在人口问题的定量研究中使用计算机，具有速度快，数字准确可靠，安全保密性强（例如存贮在数据库中的资料就具有这一功能），使用方便等优越性，这是我们今后进行人口问题的定量研

究所必不可少的。

在全国计算机网络尚未建立以前，每个省、市凡有计算机的地方，都可以按这个模型对本省、市的人口发展进行精密计算和预报。在制定了本地区的人口发展规划以后，还可以求出今后不同年代应该控制的育龄妇女平均生育数作为规划控制指标。这样，对今后几十年以至一百年的人口发展情况可以有清晰的数量指示。

人口的发展是一个动态过程。近年的控制数字会影响今后100年的人口数。动态模型的最大特点就是能充分准确地反映出这个动态关系。只要有一台中小型的计算机，即可能完成全部动态预报任务，使我们能够看到当前计划生育工作的努力，对子孙后代的具体影响如何。

一旦一个精确的模型被广泛使用以后，人口科学将从狭义的人文科学提高到一个新的阶段，成为一门精密的科学。我们深信，这对我们的社会主义建设是非常需要的。

（作者工作单位　宋健：全国自动化学会
李广元：七机部二院计算站）

附　　录　　人口发展基本方程和计算公式

一、基本模型

用 $N(r,t)$ 表示 t 时刻一切年龄小于 r 的人口总数，$N(r,t)$ 称为人口函数。依定义，$N(r,t)$ 是两个变量的非负函数。并且 $N(r,t)$ 是 r 的递增函数。当 $r=0$ 时，$N(0,t)=0$。如果 r_M 是人可能活到的最大年龄，则有

$$N(r_M,t)=N(\infty,t)=N(t) \tag{1—1}$$

式内 $N(t)$ 是 t 时刻的人口总数。

严格地讲，$N(r,t)$ 是 r 的阶梯函数，但当人口数量相当大时，不妨认为 $N(r,t)$ 是 r 和 t 的连续函数。而且我们还进一步假定 $N(r,t)$ 的一阶偏导数 $\frac{\partial N(r,t)}{\partial r}$，$\frac{\partial N(r,t)}{\partial t}$ 都是 r 和 t 的连续函数。

令 $P(r,t)=\frac{\partial N(r,t)}{\partial r}$，$P(r,t)$ 称为人口密度函数（也称为人口按龄构成，或称人口状态），显然有 $P(r,t)\geqslant 0$。当 $r\geqslant r_M$ 时，$P(r,t)=0$，并有以下基本关系式

$$N(r,t)=\begin{cases}\int_0^r P(\sigma,t)d\sigma, & 0\leqslant r\leqslant r_M\\ N(t), & r_M\leqslant r\leqslant\infty\end{cases} \tag{1—2}$$

设 $u(t)$ 表示 t 时刻单位时间内婴儿出生总数与 t 时刻人口总数的比值，我们称 $u(t)$ 为相对出生率函数。显然，以下关系式成立：

$$P(0,t)=u(t)N(t) \tag{1—3}$$

用 Δr，Δt 分别表示年龄和时间的增量。依 $P(r,t)$ 的定义，t 时刻年龄在区间 $[r, r+\Delta r]$ 内活着的人总数为 $P(r,t)\Delta r$。如果用 $P_\mu(r,t)$ 表示人口死亡密度函数，则在 t 时刻年龄在 $[r,r+\Delta r]$ 内单位时间死亡的人数将是 $P_\mu(r,t)\Delta r$。我们定义相对死亡率函数为

$$\mu(r,t)=\frac{P_\mu(r,t)\Delta r}{P(r,t)\Delta r}=\frac{P_\mu(r,t)}{P(r,t)} \tag{1—4}$$

函数 $\mu(r,t)$ 可以通过 t 时刻人口按年龄死亡率分布的统计计算出来。

有关中国人口函数 $N(r,t)$，人口密度函数 $P(r,t)$ 和相对死亡率函数 $\mu(r,t)$ 的变化趋势，都表示在图1—1中。

人口状态的方程是

$$\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}+\frac{\partial P(r,t)}{\partial r}=-\mu(r,t)P(r,t)+W(r,t) \tag{1—5}$$

其中 $W(r,t)$ 是指迁移、天灾、战争等引起的人口扰动。方程(1—5)是一阶线性偏微分方程，它的边界条件是

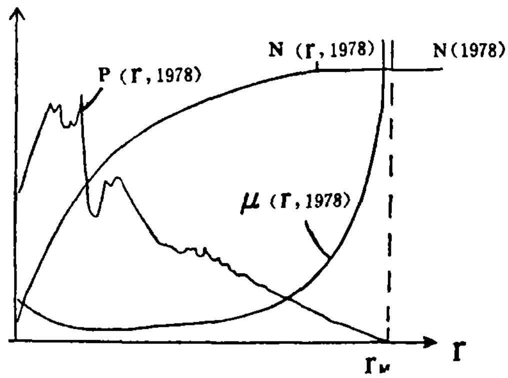

图1—1

$$P(0,t)=u(t)N(t),$$

$$P(r_M,t)=0。\qquad (1-6)$$

设某一时刻，例如 $t=0$，人口密度函数已由人口统计数据给出为 $P_0(r)$，则(1—5)的初始条件就是

$$P(r,0)=P_0(r) \qquad (1-7)$$

综合方程(1—5)，(1—6)，(1—7)，就得到了人口发展方程的完整形式

$$\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}+\frac{\partial P(r,t)}{\partial r}=-\mu(r,t)P(r,t)+W(r,t)$$

$$P(r,0)=P_0(r)$$

$$P(0,t)=u(t)N(t)=u(t)\int_0^{r_M}P(r,t)dr \qquad (1-8)$$

$$P(r_M,t)=0$$

这就是人口动态过程的连续模型。在用统计方法知道了 $\mu(r,t)$，$W(r,t)$，$P_0(r)$ 后，给定相对出生率函数 $u(t)$，就可以求解方程组(1—8)，得到的 $P(r,t)$ 就反映了人口发展过程随着年龄和时间的变化规律。人口密度函数 $P(r,t)$ 包含了人口统计工作中所需要的各种主要信息。

设年龄区间 $[r_1,r_2]$ 是妇女的育龄区间，其中 r_1 是生育年龄下限，r_2 是生育年龄上限。用 $R(r,t)$ 表示 t 时刻单位时间内，年龄在 $[r,r+\Delta r]$ 内的妇女们所生孩子的总数与 t 时刻年龄在 $[r,r+\Delta r]$ 内妇女们人数的比值，称为生育密度函数。如果年龄为 r 的妇女人数与同年龄总人数的平均比例是 $k(r,t)$，则绝对出生率可表达成

$$P(0,t)=u(t)N(t)=\int_{r_1}^{r_2}k(r,t)R(r,t)P(r,t)dr \qquad (1-9)$$

这时选择控制 $u(t)$ 的问题，就变成了选择生育密度函数 $R(r,t)$。对 $R(r,t)$ 的选择，能够反映政府制定的计划生育的各种方针政策。如每个妇女最大生育数，两次生育的最小时间间隔，最小生育年龄限制等等。如限制条件

$$\int_{r_1}^{r_2}\int_{r_1}^{r_2}R(r,t)drdt\leqslant R_0。\qquad (1-10)$$

表示每个妇女生育总数不超过 R_0。

在一个稳定的社会中，$R(r,t)$ 可分解为

$$R(r,t)=B(t)\Gamma(r) \qquad (1-11)$$

其中 $\Gamma(r)$ 表示妇女按龄生育密度函数。而 $B(t)$ 表示生育量按时间的分布。如果令

$$h(r)=\left(\int_{r_1}^{r_2}\Gamma(r)dr\right)^{-1}\Gamma(r),$$

则

$$P(0,t)=u(t)N(t)=\beta(t)\int_{r_1}^{r_2}k(r,t)h(r)P(r,t)dr \qquad (1-12)$$

可以证明此时 $\beta(t)$ 就意味着每个育龄妇女一生中平均生育数，$h(r)$ 称为生育模式。当给定了不同的 $\beta(t)$ 和 $h(r)$ 时，代入到(1—8)中即可算出人口发展的数值结果。

二、发展方程离散量的定义和计算公式

我们定义 t 时刻 i 岁的人口数为

$$P_i(t)=\int_{r_i}^{r_{i+1}}P(r,t)dr, \qquad (2-1)$$

并且定义 i 岁的人口单位时间内死亡人数为

$$\mu_i(t)P_i(t)=\int_{r_i}^{r_{i+1}}\mu(r,t)P(r,t)dr \tag{2—2}$$

注意到时间 t 和年龄 r 的增量应是相等的，故

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial r}\right)\Delta t=\frac{\partial P}{\partial t}\Delta t+\frac{\partial P}{\partial r}\Delta r=P(r+\Delta r,t+\Delta t)-P(r,t)$$

对(1—8)第一式两端积分，且令 $\Delta r=\Delta t=1$，依定义(2－1)有

$$P_{i+1}(t+1)-P_i(t)=-\mu_i(t)P_i(t)\ ,\ i=0,1,2,\cdots\cdots \tag{2－3}$$

式内

$$\mu_i(t)=\frac{P_i(t)-P_{i+1}(t+1)}{P_i(t)} \tag{2－4}$$

称为前向按龄死亡率，它与人口统计中常用的年底按龄死亡率 $\eta_i(t)$不同。因为依人口统计中的定义

$$\eta_{i+1}(t)=\frac{P_i(t)-P_{i+1}(t+1)}{P_{i+1}(t+1)} \tag{2－5}$$

$$i=0,1,2,\cdots\cdots$$

我们称它为后向按龄死亡率。易于看出，$\eta_{i+1}(t)$和 $\mu_i(t)$有如下关系

$$\mu_i(t)=\frac{\eta_{i+1}(t)}{1+\eta_{i+1}(t)} \tag{2－6}$$

$$i=0,1,2,\cdots\cdots$$

若用 $\mu_{00}(t)$表示 t 年代的婴儿死亡率，同样有

$$\mu_{00}(t)=\frac{\eta_0(t)}{1+\eta_0(t)} \tag{2－7}$$

其中 $\eta_0(t)$称为后向婴儿死亡率，它表示当年未满周岁的婴儿死亡数与当年年底统计的未满周岁的婴儿总数的比值。

若把人口统计中的年中按龄死亡率记为，$\zeta_i(t)$，则不难验证

$$\zeta_i(t)=\frac{2\eta i(t)}{2+\eta_i(t)} \tag{2—8}$$

$$i=0,1,2,\cdots\cdots$$

利用上述离散量定义，可以把(1—8)和(1—12)都写成便于数值计算的方程组

$$\begin{cases}P_0(t)=(1-\mu_{00}(t))\beta(t)\sum\limits_{i=r_1}^{r_2}h_i k_i(t)P_i(t)\\ P_{i+1}(t+1)=(1-\mu_i(t))P_i(t),\ \ i=0,1,2,\cdots\cdots M-1。\end{cases} \tag{2－9}$$

注意，这里我们已经假定 t 是离散变量，只取整值。

三、人口统计学中各种指数的定义和计算公式

(1) t 年代人口总数 $\qquad N(t)=\sum\limits_{i=0}^{r_M}P_i(t)$

(2) t 年代死亡人口总数 $\qquad D(t)=\sum\limits_{i=0}^{r_M}\mu_i(t)P_i(t)+\mu_{00}(t)P_0(t)$

(3) 人口死亡率 $\qquad \eta(t)=\frac{D(t)}{N(t)}$

(4) t 年代总人口的平均年龄 $\qquad A(t)=\frac{1}{N(t)}\sum\limits_{i=0}^{r_M}iP_i(t)$

(5) 人口中位数 m(t)为 $m(t)=\left\{ i, \sum_{j=0}^{i} P_j(t) \;\middle|\; \min_i \left| \frac{N(t)}{2} - \sum_{j=0}^{i} P_j(t) \right| \right\}$

(6) 死亡人口平均年龄为 $A_d(t)=\frac{1}{D(t)}\sum_{i=0}^{rM} i\mu_i(t)P_i(t)$

(7) t 年代出生人数 $\varphi(t)$ 和年终人口相对出生率 u(t) 分别为

$$\varphi(t)=\beta(t)\sum_{i=r1}^{r2} k_i(t)h_i P_i(t) \qquad u(t)=\frac{\varphi(t)}{N(i)}$$

(8) 育龄妇女平均生育数 $\beta(t)=\frac{u(t)N(t)}{\sum_{i=r_1}^{r_2} k_i(t)h_i P_i(t)}$

(9) 人口自然增长率 $R(t)=u(t)-\eta(t)$

(10) 劳力人口数 $L(t)=\sum_{i=l_1}^{l_2}[1-k_i(t)]P_i(t)+\sum_{i=L'_1}^{L'_2} k_i(t)P_i(t)$

其中$[l_1, l_2]$是男性劳力人口年龄区间，$[l'_1, l'_2]$是女性劳力人口年龄区间。

(11) 劳动力指数 $\lambda(t)=\frac{L(t)}{N(t)}$

(12) 抚养指数是指每一个劳动力人口平均要抚养的非劳力人口数

$$\rho(t)=\frac{N(t)-L(t)}{L(t)}=\frac{1}{\lambda(t)}-1$$

(13) t 年代出生的婴儿平均期望寿命 $S_0(t)$ 和 t 年代为 r_0 岁的人口平均期望寿命 $S_{r0}(t)$ 分别为

$$S_0(t)=\sum_{i=0}^{r_M} e^{-\sum_{j=0}^{i}\mu_j(t)}, \quad S_{r0}(t)=\sum_{i=r0}^{r_M} e^{-\sum_{j=r0}^{i}\mu_j(t)}$$

(14) t 年代人口老化指数 $\omega(t)$ 我们定义为 $\omega(t)=\frac{A(t)}{S_0(t)}$

它的含义是人口平均年龄相对于平均寿命的比值。

(15) 人口老少比 g(t) 是指一个社会中老年人口数 $\Omega(t)$ 与少年儿童人口数 C(t) 之比

$$g(t)=\frac{\Omega(t)}{C(t)}$$

式内 $$\Omega(t)=\sum_{i=r0}^{r_M}[1-K_i(t)]P_i(t)+\sum_{i=r'_0}^{r_M} K_i(t)P_i(t)$$

r_0 和 r'_0 分别为男性老人和女性老人的年龄下限； $C(t)=\sum_{i=0}^{r_c} P_i(t)$

r_c 为少年人口的年龄上限。

(16) 社会按龄人口平均密度 $\nu(t)$ 是指平均每岁人口数，即 t 年代人口总数与该年出生婴儿平均期望寿命的比值

$$\nu(t)=\frac{N(t)}{S_0(t)}。$$